4. Stunde (1)

Tuesday, March 16, 2010
19:57

Nachtrag: Wir kümmern uns allg. um part. Fkt.
Insbes: für f, g $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ part, $f = g$ heißt:
$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ (d.h., $f(\bar{x})$ def gdw $g(\bar{x})$ def) und
$\bar{x} \in \mathrm{dom}(f) \to f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

Wenn M eine Registermaschine (d.h. ein Programm) ist, dann ist $f_M^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (die von M berechnete n-dim. Fkt.) natürlich i.A. partiell.

Genauso für Def von rekursiver Funktion (Grundfkt + Abschluss unter Einsetzung, prim. Rek. und μ-Rek.):

Insbesondere: Wenn $f_1 \ldots f_n$ $\mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ part, dann ist
$g(f_1(x_1 \ldots x_m), \ldots, f_n(x_1 \ldots x_m))$ per definition undefiniert gdw $f_1(x_1 \ldots x_m)$ undef. oder ... oder $f_n(x_1 \ldots x_m)$ undef. oder $g(f_1(x_1 \ldots x_m), \ldots, f_n(x_1 \ldots x_m))$ undefiniert.

Bsp: $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstante 0-Fkt, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ part.
dann ist $g \circ f$ i.A. nicht total (und nicht die konst. 0-Fkt)

Analog bei der Konstr. von f mittels prim. rek. bzw μ-Rek aus part. Fkt: f ist nur dann def, wenn alle zur Konstr. von f verwendeten Funktionswerte definiert sind.

Bem: Um diese notationellen Probleme zu vermeiden, definiert Ziegler rekursive Fkt nur für totale Funktionen. Dadurch kann aber zB nicht die (partielle, rekursive) universelle Funktion definiert werden.

Notation: (•) Zur Erinnerung:
Eine (part.) Fkt $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist berechenbar, wenn es eine Registermaschine $\mathcal{M}$ gibt sd: $f = f^n_{\mathcal{M}}$ (d.h. $\mathcal{M}$ berechnet f)
Insbes: $\bar{x} \in dom(f)$ gdw ($\mathcal{M}$ hält auf Input $\bar{x}$)

(•) statt "Registermaschine" sagen wir (austauschbar) auch: Maschine, Computer, Programm, Computerprogramm

(•) Eine part. Fkt $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist rek, wenn sie aus Grundfkt durch Einsetzung, prim. Rek und μ-Rek. entsteht.

(•) statt "rek.", sagen wir auch: partiell rekursiv, μ-rekursiv.

(•) $A \subseteq \mathbb{N}$ ist rek., wenn F_A (natürlich total und) rek. ist. Statt rek. sagen wir auch: entscheidbar.

4. Stunde (Forts.)

Sunday, March 28, 2010
20:54

Wir werden sehen

<u>Satz</u>: Rekursiv $\Leftrightarrow$ berechenbar

Für den Beweis verwenden wir:

<u>Kodierung</u>: Wir ordnen jedem Programm $\mathcal{M}$ die Gödelnummer $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner$ (eine natürliche Zahl) zu

Der Beweis zeigt auch die Existenz des

<u>Universellen Programms</u>: Es gibt eine (notwendigerweise partielle) rek. Fkt $U : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ so dass für alle Programme $\mathcal{M}$ gilt: $f_1^{\mathcal{M}}(x) = U(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (dabei: —"— def gdw —"— def)

Daraus folgt: Halteproblem $H = \{x \in \mathbb{N} : U(x,x) \text{ def}\}$ ist unentscheidbar.

Bew: Wenn H entscheidbar ist, dann ist (wegen 12.3)

$$g(x) := \begin{cases} U(x,x)+1 & \text{wenn } x \in H \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

berechenbar, d.h. $g = f_{\mathcal{M}}^1$ für ein Programm $\mathcal{M}$.

Dann gilt:

$$g(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner) = f_{\mathcal{M}}^1(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner) = U(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, \ulcorner \mathcal{M} \urcorner)$$

und $$g(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner) = \begin{cases} U(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, \ulcorner \mathcal{M} \urcorner)+1, & \text{wenn } \ulcorner \mathcal{M} \urcorner \in H \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. $$U(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, \ulcorner \mathcal{M} \urcorner) = \begin{cases} U(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, \ulcorner \mathcal{M} \urcorner)+1, & \text{wenn } U(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, \ulcorner \mathcal{M} \urcorner) \text{ def} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Widerspruch.